Übungsklausur Analysis & Geometrie (Lernerfolg)

Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Berechne die erste Ableitung von $f(x) = (\sin(x)+1)\cdot e^x$. (2VP)

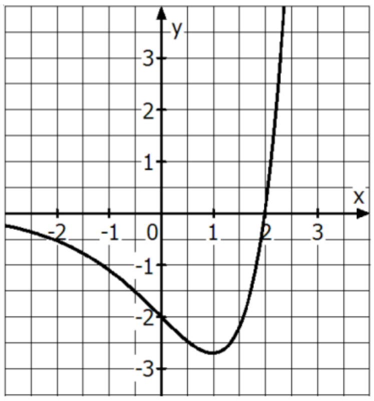
2) a) Berechne $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos(2x)\,dx$.

b) Bestimme diejenige Stammfunktion von f mit $f(x) = -6\sin(2x)$, deren Schaubild die Tiefpunkte auf der x-Achse hat. (5VP)

3) Löse die Gleichung $\sin(x)\cdot(\sin(x)-3) = 4$ für $0 \le x \le 2\pi$. (3VP)

4) Skizziere das Schaubild von $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1$ für $0 \le x \le 2\pi$ und gib die Periode an. (3VP)

5) Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



a) Gib $f'(0)$ näherungsweise an.

b) F ist eine Stammfunktion von f.
Untersuche, an welchen Stellen im abgebildeten Bereich der Graph von F Hoch-, Tief- bzw. Wendepunkte besitzt.

c) Entscheide, welche der folgenden Funktionsgleichungen zur Funktion f gehört:

$f_1(x) = x\cdot e^{-x}$ $\quad$ $f_2(x) = (x-2)\cdot e^x$

$f_3(x) = (x-2)\cdot e^{x-2}$ $\quad$ $f_4(x) = x\cdot e^x - 2$

Begründe Deine Entscheidung. (6VP)

6) Gegeben sind die Ebene E und die Gerade g durch

$E: 4x_1 + x_2 - x_3 = 9$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme die gegenseitige Lage von g und E.

b) Bestimme eine Gleichung der Ebene, die orthogonal zu E ist und g enthält. (4VP)

7) Gegeben sind die Ebene E und die Gerade g durch

$E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme den Schnittpunkt von E und g.

b) Bestimme alle Punkte von g, die von E den Abstand 3 haben. (4VP)

Übungsklausur Analysis & Geometrie (Lernerfolg)

Wahlteil Analysis (mit WTR und Merkhilfe)

Aufgabe 1

a) Der Lernerfolg von Frauke für die nächste Mathematikklausur kann durch die Funktion f mit

$$f(t) = 90 - 80 \cdot e^{-0{,}05t} \quad \text{(t: Zeit in Minuten, f(t): Gelernter Stoff in Prozent)}$$

beschrieben werden.

(1) Berechne, wie viel Prozent des Lernstoffes Frauke nach 1 Stunde gelernt hat.
(2) Berechne, wie lange Frauke lernen muss, bis sie 75% des Stoffes gelernt hat.
(3) Begründe rechnerisch, dass Frauke ohne eine Änderung ihres Lernverhaltens den Stoff bis zur Klausur nicht zu einhundert Prozent gelernt haben wird.

b) Gundula lernt auf eine andere Art: Sie kennt zu Beginn ihres Lernens bereits 10 Prozent des Stoffes und nach einer halben Stunde 31 Prozent.
Gundulas Lernerfolg kann durch die Funktion g mit

$$g(t) = a \cdot e^{kt} \quad \text{(t: Zeit in Minuten, g(t): Gelernter Stoff in Prozent)}$$

beschrieben werden.

(1) Bestimme die Werte für a und k. (Teilergebnis: $g(t) = 10 \cdot e^{0{,}038t}$)
(2) Gib eine Gleichung an, mit der folgende Fragestellung beschrieben werden kann: „Ab welcher Lernzeit hat Gundula mehr gelernt als Frauke?“
(3) Begründe, dass eine Beschreibung von Gundulas Lernerfolg durch die Funktion g(t) für eine längere Lernphase nicht mehr sinnvoll ist.

Aufgabe 2

Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion h_a gegeben durch $h_a(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$
Jede Funktion h_a hat zwei Extremstellen. Bestimme diese.

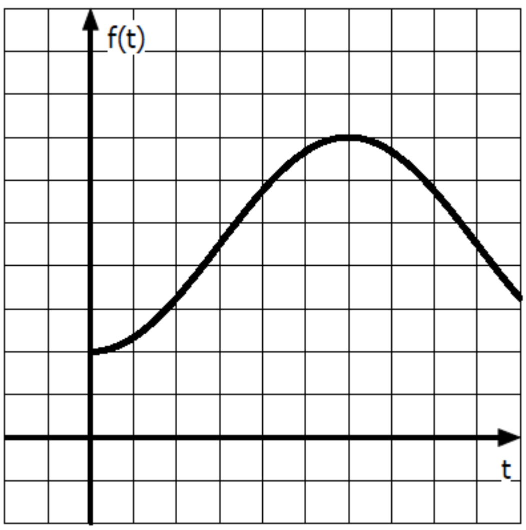
Aufgabe 3

Der Temperaturverlauf an einem Sommertag wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 18 - 10\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right),\ 0 \leq t \leq 24$$

(t in Stunden nach Mitternacht, f(t) in °C).

a) Ergänze in der Abbildung des Graphen von f die Skalierungen der Koordinatenachsen.
b) Berechne die Durchschnittstemperatur zwischen 6 Uhr und 18 Uhr.



Übungsklausur Analysis & Geometrie (Lernerfolg)

Lösungen Pflichtteil:

1) $f'(x)=\cos(x)\cdot e^x+(\sin(x)+1)\cdot e^x$ **2P**

2) a) $\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\cos(2x)dx=\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}=\frac{1}{2}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}-\frac{1}{2}\underbrace{\sin(0)}_{=0}=\boxed{\frac{1}{2}}$ (2P)

b) $F(x)=6\cos(2x)\cdot\frac{1}{2}+c=3\cos(2x)+c$ (1,5P)

Die Amplitude von F(x) ist $a=3$, somit muss F(x) um $c=3$ LE in Richtung der y-Achse nach oben verschoben werden: $\boxed{F(x)=3\cos(2x)+3}$ (1,5P) **5P**

3) a) $(\sin(x))^2-3\sin(x)-4=0$ **3P**

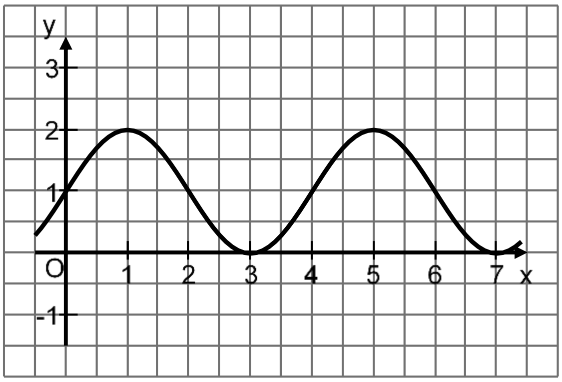
Subst.: $u=\sin(x)$

$\Rightarrow u^2-3u-4=0\Rightarrow u_{1/2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{16}{4}}$

$u_{1/2}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}\Rightarrow\ u_1=4$ oder $u_2=-1$

$\sin(x)=4$ oder $\sin(x)=-1$

k. L. oder $\boxed{x=\frac{3}{2}\pi}$



4) Skizze rechts (2P) Periode $\boxed{p=4}$ (1P) **3P**

5) a) $f'(0)\approx-1$ (1P)

b) Das Schaubild von f hat an der Stelle $x=2$ eine Nullstelle mit VZW von – nach +, deshalb hat F hier einen Tiefpunkt. (1,5P)
Das Schaubild von f hat an der Stelle $x=1$ eine Extremstelle, deshalb hat F hier eine Wendestelle. (1,5P)

c) $f_1(0)=0; f_2(0)=-2; f_3(0)=-2\cdot e^{-2}; f_4(0)=-2$ somit nur f_2 oder f_4 möglich

$f_2(2)=0; f_4(2)=2e^2-2\neq0\quad\Rightarrow f_2$ gesuchte Funktion f (2P) **6P**

6) a) g in E einsetzen: $4(-5+t)+3-2t-1-2t=9\Leftrightarrow 0t=27\Rightarrow$ kein Schnittpunkt $\Rightarrow g\parallel E$ (2P)

b) $F:\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$ (2P) **4P**

7) a) g in E: $2+2t+1+t+6=6\Leftrightarrow 3t=-3\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow\boxed{S(0|0|3)}$ (1P)

b) HNF von E: $\frac{2x_1+x_2+2x_3-6}{3}=0$ (1P) Allgemeiner Punkt von g: $P(1+t|1+t|3)$

Setze P in HNF ein: $\left|\frac{2+2t+1+t+6-6}{3}\right|=3\Leftrightarrow\left|\frac{3t+3}{3}\right|=3\Leftrightarrow|t+1|=3$

$t+1=3\Rightarrow\boxed{t_1=2\Rightarrow P_1(3|3|3)}$ oder $t+1=-3\Rightarrow\boxed{t_2=-4\Rightarrow P_2(-3|-3|3)}$ (2P) **4P**

Übungsklausur Analysis & Geometrie (Lernerfolg)

Lösungen Wahlteil Analysis:

Aufgabe 1

a) (1) $f(60) = 86{,}02 \Rightarrow$ 86%

(2) $f(t) = 75 \Rightarrow t = 33{,}48 \Rightarrow$ Etwa 33,5min

(3) Für $t \to \infty$ gilt $f(t) = 90 - 80 \cdot \underbrace{e^{-0{,}05t}}_{\to 0} \to 90 \Rightarrow$ Frauke kann maximal etwa 90% des Stoffs lernen

b) (1) (I) $g(0) = 10 \Leftrightarrow a \cdot \underbrace{e^0}_{=1} = 10 \Leftrightarrow \boxed{a = 10}$

(II) $g(30) = 31 \Leftrightarrow 10 \cdot e^{30 \cdot k} = 31 \Leftrightarrow e^{30 \cdot k} = 3{,}1 \Leftrightarrow \boxed{k = 0{,}0377}$

(2) $f(t) = g(t)$ und nach t auflösen

(3) Gundulas Lernerfolg wird durch eine Exponentialfunktion beschrieben. Ab ca. 61 liegt der Lernerfolg von Gundula über 100%. Dies ist nicht mehr sinnvoll.

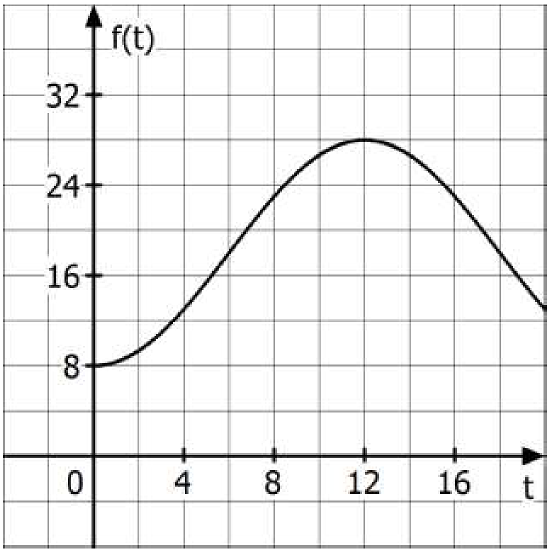
Aufgabe 2

$$h_a'(x) = 2x \cdot e^{-ax} - a \cdot x^2 \cdot e^{-ax} = x \cdot e^{-ax} \cdot (2 - ax)$$

$$h_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot e^{-ax} \cdot (2 - ax) = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 0;\ x_2 = \frac{2}{a}}$$

Aufgabe 3

a) siehe Skizze



b) $$m = \frac{1}{18-6} \int_6^{18} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{12}\left[18t - \frac{120}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} t\right)\right]_6^{18} \approx 24{,}4$$

Die Durchschnittstemperatur zwischen 6 Uhr und 18 Uhr beträgt 24,4°C